А. В. ШАПОВАЛОВ

Принцип узких мест

Москва
Издательство МЦНМО
2006

УДК 51(07)
ББК 22.1
Ш24

Шаповалов А. В.

Ш24 Принцип узких мест — М.: МЦНМО, 2006. — 24 с.: ил.

ISBN 5-94057-234-0

Книга посвящена поиску решения нестандартных математических задач. Она предлагает общий подход, объединяющий широкую группу известных приемов. Изложение ведется в непринужденной манере. Упор делается на разбор примеров, на то, как принцип узких мест помогает находить решения. В качестве примеров и задач для самостоятельного решения использованы более 30 оригинальных задач автора.

Книга адресуется всем любителям интересных задач, в первую очередь — школьникам старших классов, а также учителям и руководителям математических кружков.

ББК 22.1

Александр Васильевич Шаповалов

ПРИНЦИП УЗКИХ МЕСТ

Редактор Семенов А. В.

Подписано в печать 20.02.2006 г. Формат 60×90 1/16. Печать офсетная.
Печ. л. 1,5. Тираж 3000 экз. Заказ №

МЦНМО
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-234-0

Предисловие

Где тонко, там и рвется.
Поговорка

Решать нестандартную задачу — все равно, что идти через дикий лес. Можно, конечно, выбирать дорогу наугад, но тогда скорее всего будешь попадать то в непроходимую чащу, то в болото. Придется ходить туда-сюда, но даже если повезет и пройдешь куда надо, то зря потратишь много времени и сил. Гораздо легче идти, если есть хоть какой-то ориентир. Скажем, забрался на горку и увидел, что надо обязательно перейти речку, а брод только во-о-о-н там. Это, конечно, уменьшает свободу выбора пути, но зато избавляет от ненужных блужданий.

Вот и в задачах, где строят и исследуют конструкции, зацепкой к решению часто служит та часть конструкции, где свобода выбора — наименьшая. Именно это мы и назовем *узким местом*. Ясно, что от узкого места быстрее дойти до противоречия или легче построить часть возможной конструкции.

Давайте посмотрим, как можно выявить узкие места и использовать их для решения задач. Наряду с интуицией на помощь приходят известные приемы решения задач: соображения непрерывности, принцип крайнего, раскраска, принцип Дирихле, аналогия, инвариант, минимальный контрпример. Чтобы подчеркнуть особенности каждого из приемов для поиска узких мест, мы сгруппируем задачи по небольшим главам.

Изложение ведется, в основном, путем разбора задач, называемых *примерами*. А вот *упражнения* и *задачи* остаются читателю для самостоятельного решения.

Ищи главное препятствие

Кто нам мешает, тот нам поможет.
к/ф «Кавказская пленница»

Самая главная идея: поглядеть на задачу «сверху». Если удастся понять, где нам будет всего труднее, то начать нужно именно с попытки преодоления этой трудности.

Пример 1. Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник на равнобедренные треугольники с углом 40° при основании?

Анализ и решение. Узким местом, очевидно, будет угол прямоугольника. Его надо сложить из углов треугольников. Однако есть только углы в 40° (при основании) и 100°

(при вершине треугольника). Из них прямой угол не сложишь. Значит, и весь прямоугольник на такие треугольники разрезать нельзя.

Если узкое место не находится в требуемой задачей конструкции, стоит поискать его в конструкции *нашего подхода* к задаче. Говоря образно, если не видно узкого места в лесу, то мы смотрим не с той горки (дерева) или не в ту сторону. Для начала надо будет поискать лучший обзор: вот при решении такой предварительной задачи и может возникнуть узкое место.

Пример 2. Несколько ученых переехали из страны A в страну B. Мог ли в результате средний IQ (коэффициент интеллекта) в обеих странах увеличиться?

Анализ и решение. На первый взгляд — нет, ведь «Если в одном месте прибыло, то в другом должно убыть». Но это касается только суммы, среднее ведет себя хитрее. Узкое место: понять, *как* оно себя ведет. Достаточно, впрочем, заметить, что повысить среднее IQ в стране B можно, принимая ученых с IQ выше среднего. И наоборот, чтобы повысить среднее IQ в стране A, надо избавляться от людей с IQ *ниже* среднего! Такое возможно, если среднее IQ в A выше среднего в B: организуем переезд ученых с IQ из зазора между средними.

Попробуйте ответить на более хитрый вопрос.

Упражнение 1. Возможно ли повышение IQ в обеих странах, если там нет ни одного человека, чей IQ попадал бы в зазор между средними IQ в этих странах?

Если конструкций много, то полезно поискать *общее узкое место*. Это может сработать не только при доказательстве невозможности, но и при построении способа. Классический пример: для противодействия всем планам вторжения — взрываем все мосты!

Пример 3. На бесконечном листе клетчатой бумаги играют двое, ходят по очереди. Своим ходом можно выбрать любую незакрашенную сторону клетки и покрасить ее в любой цвет (число цветов неограничено). Первый выиграет, если найдется замкнутая ломаная, где все звенья окрашены в разные цвета. Может ли второй ему помешать?

Анализ и решение. Ломаных бесконечно много, и задача второго «испортить все» кажется нереальной, тем более, что любое звено можно обойти. Однако ложка дегтя портит бочку меда. Присмотримся: нет ли у всех ломаных общего свойства, которое можно было бы объявить узким местом? Ну, поворачивать они все должны, чтобы замкнуться... Ага, повороты могут быть разные, но среди них обязательно найдется поворот в виде буквы Г (речь, конечно, идет о паре соседних звеньев: одно выходит из общей вершины вправо, другое — вниз. А еще бывают L-повороты и два поворота, для которых букв нет, а именно, пары вверх-влево и вниз-влево). Вот вам и узкое место! Испортим *все* Г-повороты: разобьем все звенья на Г-пары, и как только первый закрасит одну половинку пары, второй должен покрасить вторую половинку в тот же цвет.

Задача 2. Верно ли, что любой треугольник можно разрезать на 1000 частей, из которых можно сложить квадрат?

Задача 3. На бесконечной клетчатой доске двое играют в крестики-нолики по обычным правилам: выигрывает тот, кто первым выстроит 5 своих знаков в ряд по вертикали или горизонтали (ряд по диагонали не считается). Докажите, что второй может гарантировать себе как минимум ничью.

Засада на переправе (непрерывность обычная и дискретная)

Сколь ни вдоль, а поперек изволь.
Поговорка

Если объекты или ситуации задачи можно разделить на две категории («два берега»), и если путь начинается на одном берегу, а заканчивается на другом, то неизбежно придется переправляться. Часто именно это оказывается узким местом. Надо только убедиться, что не удастся переправиться, не замочив ног. В частности, если некоторая величина принимает целочисленные значения, изменяется на каждом шаге не более чем на 1 и в процессе меняет знак, то она обязательно проходит через 0. Такая величина называется *дискретной*, а прием решения — *дискретной непрерывностью*. Здесь положительные значения — один берег, отрицательные — другой, значение 0 — речка. Решение задачи этим методом сводится к нахождению подходящей дискретной величины (подходящей в том смысле, что прохождение через 0 дает то, что требуется) и проверке, что путь проходит через точки обоих берегов.

Пример 4. Журнал «Юный хакер» выходит нерегулярно — всего два или три номера в год. На обложке стоит номер журнала и год выпуска: № 1 — 2005, № 2 — 2005, № 3 — 2006, ... Докажите, что если редакцию не закроют, то рано или поздно выйдет номер, где два числа на обложке совпадут.

Анализ. Процесс очевиден: выход журнала. Берега тоже: один — номера журналов, меньшие года выхода, другой — большие. За дискретную величину естественно взять разность номера журнала и года выхода: разность 0 доказывает утверждение. Ясно, что разность меняется на 1 в моменты выхода журнала или смены года. Ясно также, что сейчас она отрицательна, а лет через 1000 с хвостиком станет положительной. Значит, момент равенства года и номера все-таки наступит.

В предыдущем примере у нас изначально были две величины, и естественно было делить на берега так: на одном первая больше, на другом — вторая. Чаще, однако, такие величины приходится вводить самим: в этом и состоит искусство! Разумеется, если величина не целочисленная, но изменяется непрерывно между двумя значениями, она обязана принять и все промежуточные значения.

Пример 5. В противоположных углах квадратного пруда со стороной 100 м сидели два гуся. Поплавав по пруду, они оказались в двух других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент расстояние между кончиками их клювов было ровно 110 м.

Анализ. Естественно разделить все расположения пары гусей на два «берега» — когда расстояние между ними больше 110 м, и когда меньше. Начальное расстояние — это примерно диагональ квадрата, оно явно больше 110 м. Правда, и конечное расстояние больше 100 м. Однако, переплывая в другие углы, гусям придется приблизиться друг к другу. Попробуем поймать момент, когда они будут ближе 110 м друг к другу. Узкое место — ширина пруда (от стороны до стороны): когда гуси напротив друг друга, расстояние между ними не больше ширины.

Решение. Пусть гуси изначально сидели в углах A и C квадрата $ABCD$, а в конце оказались в углах B и D соответственно. Вначале один гусь был ближе к стороне BC, а в конце — другой. Значит, был момент, когда расстояния до BC были одинаковы. В этот момент отрезок, соединяющий их носы, был параллелен стороне BC, его длина была меньше BC и меньше 110 м. А в начальный момент расстояние это было больше 110 м. По непрерывности между этими моментами был момент, когда расстояние было равно 110 м.

В предыдущей задачи нам самим пришлось «строить берега». Бывает и наоборот: «берега» есть, а процесса нет. Тогда его надо организовать, причем так, чтобы «на переправе» был достигнут нужный эффект.

Пример 6. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся точки разного цвета на расстоянии 1.

Анализ. Берега очевидны — цвета. Организуем процесс перехода с одного берега на другой. Можно пройти между точками разного цвета по прямой или непрерывной кривой, цвет сменится, но как обеспечить расстояние 1? Идея: будем идти шагами длины 1.

Решение. Выберем две точки A и B разного цвета и пройдем из A в B шагами длины 1. Это можно сделать, например, идя от A к B по прямой с шагом 1. Если же для последнего шага останется отрезок CB короче 1, то построим равнобедренный треугольник CDB со сторонами $CD = DB = 1$ и сделаем вместо шага CB два шага: CD и DB. Последим за цветом точек, по которым шагаем. На каком-то шаге цвет сменится. Начало и конец шага и дадут искомые точки.

Зная, что узким местом конструкции является переправа, будем доказывать ее неизбежность — при доказательстве невозможности. Наоборот, при построении примера нужно так строить берега, чтоб они не соприкасались и переправ не возникало.

Пример 7. Можно ли расставить в таблице 10×10 числа от 1 до 100 так, чтобы ни в какой паре клеток с общей стороной или вершиной сумма не делилась

а) на 3; б) на 4?

Анализ. Ясно, что можно заменить все числа на остатки по соответствующему модулю. То есть в (а) можно расставлять 0, 1 и 2 (причем единиц на одну больше, чем нулей или двоек), а в (б) — 0, 1, 2 и 3 (всех поровну).

а) Надо избегать ставить нули рядом, их придется разбросать изолированными «озерками», окруженными единицами и двойками. Можно ли избежать соприкосновения единицы и двойки? Нет: «берег единиц» сомкнется с «берегом двоек», так как «речку» из нулей между ними построить нельзя...

б) Нельзя ставить нули рядом с нулями и двойки рядом с двойками. Расположим их изолированными «озерками». Остаются единицы и тройки. Можно ли их отделить друг от друга? Да, ибо теперь мы можем построить «речку», чередуя нули и двойки.

Задача 4. На доске 4×4 расставляются 16 шахматных коней четырех мастей — вороные, соловые, гнедые и каурые. Существует ли такая расстановка коней, в которой вороные не бьют соловых, соловые — гнедых, гнедые — каурых, а каурые — вороных?

Задача 5. Найдутся ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

Задача 6. Есть несколько кусков сыра разного веса и разной цены за килограмм. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, что после этого можно будет разложить все куски на две кучки одинакового веса и одинаковой стоимости.

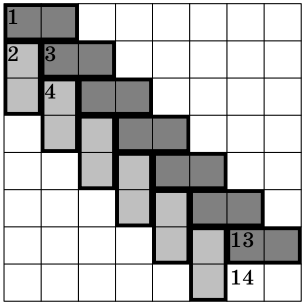
Узкие места — в первую очередь (принцип крайнего)

Век свободы не видать...
В. Высоцкий

Принцип крайнего советует обратить внимание в первую очередь на объекты «с краю», где край понимается в геометрическом или арифметическом (максимум, минимум) смысле. Узкое место является крайним в том смысле, что там степень свободы — наименьшая.

Пример 8. Шахматная доска разбита на двуклеточные прямоугольники-домино. Докажите, что найдется пара домино, образующая квадрат из 4 клеток.

Анализ. Попробуем построить контрпример. Наименьшая свобода — в углу: там домино можно положить всего двумя способами. Не теряя общности, будем считать, что угловая клетка 1 закрыта горизонтальным домино. Рассмотрим теперь клетку 2: ее тоже можно закрыть лишь двумя способами. Горизонтальное домино не годится: вместе с первым домино оно образует квадрат. Значит, накроем клетку 2 вертикальным домино. Теперь клетку 3 можно накрыть всего двумя способами. Но вертикальное домино образовало бы квадрат со вторым домино, значит, надо накрыть горизонтально. Так продолжая, будем строить «елочку», пока она не упрется в правый нижний угол. Видим, что контрпример не получается: клетку 14 можно накрыть лишь горизонтальным домино, в результате домино 13 и 14 таки образуют запрещенный квадрат.



В приведенном выше примере узкие места действительно все время оказывались с краю в обычном, житейском смысле слова. Это нам просто повезло. Место с минимумом свободы вполне может в геометрическом или каком-то другом естественном смысле оказаться посредине. В этом случае бездумное применение принципа крайнего к успеху не приведет.

Пример 9. а) Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50?

б) Тот же вопрос для чисел от 1 до 100?

Анализ. Обе задачи легко решаются, как только мы догадаемся подсчитать для каждого из чисел количество возможных соседей (то есть чисел, образующих с ним разность не меньшую 50). Узким местом являются числа с наименьшим количеством соседей. Это число 50 в (а) и числа 50, 51 в (б). С них-то и надо начинать рассуждение...

Решение. а) Нет, так как у числа 50 нет подходящих соседей.

б) Да, например: 50, 100, 49, 99, 48, 98, 47, 97, ..., 1, 51.

Послесловие к решению. Приведенное решение пункта (б) является полным. Если вопрос сформулирован просто «Можно ли», то на олимпиаде школьник не обязан пояснять, каким образом он получил конструкцию. Но это теоретически, а практически всегда есть риск нарваться на проверяющего, который за столь краткое решение снимет баллы. Поэтому не будем рисковать, тем более, что все равно интересно понять, как конструкция была придумана. Кроме того, полезно разобраться, есть ли другие решения.

Ясно, что еще одним решением будет та же строка в обратном порядке. Покажем, что других решений нет. Изначально у чисел 50 и 51 есть только по одному подходящему соседу, значит, они должны стоять по краям строки. Пусть строка начинается с 50, тогда второе число находится автоматически: 50, 100, ... Далее вроде как можно поставить любое из чисел от 1 до 49, однако на самом деле выбора нет. Меньше всего соседей у числа 49 — их только два: 99 и 100. С краю 49 стоять не может, края уже заняты. Значит, 49 стоит посредине, меж двух соседей. Соседями могут быть лишь 100 и 99. Значит, начало строки такое: 50, 100, 49, 99, ... Далее может стоять число от 1 до 48, но меньше всего соседей осталось у 48 — числа 99 и 98 (100 уже использовано), значит выбора опять нет: 50, 100, 49, 99, 48, 98, ... И так далее, вся строка выстраивается однозначно. Обратный порядок однозначно получается, если число 50 поставить на правый край.

Конечно, далеко не каждый раз конструкция оказывается «жесткой», то есть выстраивается однозначно. Чаще всего требуемых конструкций много, и при выборе очередного шага есть несколько вариантов. В условиях избытка свободы «блуждание без компаса» почти всегда заводит в тупик. Тут часто срабатывает нестрогое, но весьма практичное правило ***зачистки закоулков***: *выбирай очередной шаг так, чтоб возможностей для следующего шага было как можно меньше.*

Комментарий к решению. Именно так мы и действовали. Заметьте, однако, что вовсе не обязательно было строить строку последовательно слева направо. «Точек роста» может быть несколько. Например, поставив на левый край число 50, мы фактически поставили на правый край 51 (и использовали это!). Вполне можно было строить строку сразу с двух сторон — от двух узких мест!

Решите самостоятельно с помощью зачистки закоулков следующую известную головоломку:

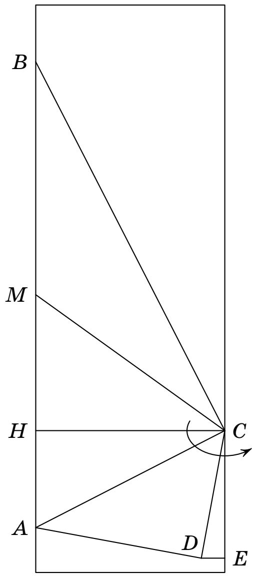
Задача 7. а) Обойдите шахматную доску конем, побывав на каждом поле ровно по разу.

б) То же, но после этого еще одним ходом вернитесь на исходное поле.

Исследуя «точки крайней несвободы», мы можем изучать свойства нежестких конструкций.

Пример 10. Прямоугольник разбит на прямоугольные треугольники, граничащие друг с другом только по целым сторонам так, что общая сторона двух треугольников всегда служит катетом одного и гипотенузой другого. Докажите, что отношение большей стороны прямоугольника к меньшей не менее 2.

Анализ и решение. Заметим, что в треугольнике гипотенуза длиннее катета. Это создает несвободу в расположение самой длинной из сторон всех треугольников: она не может быть катетом, поэтому не может быть общей стороной двух треугольников. Итак, самая длинная сторона — это гипотенуза AB некоторого треугольника ABC, и она примыкает к стороне прямоугольника. Следующее узкое место — расположение вершины C. Пойдем вокруг нее, стартовав из треугольника ABC. Заметим, что каждая следующая выходящая из C сторона, которую мы пересечем, будет короче предыдущей, так как в очередной треугольник мы «входим» через гипотенузу, а «выходим» через катет. Поэтому обход по кругу должен прерваться выходом наружу прямоугольника, а это возможно только если вершина C лежит на стороне прямоугольника. Наличие так вписанного в прямоугольник треугольника (A и B — на одной стороне, C — на противоположной) и создает требуемое ограничение на отношение сторон. А именно, длина прямоугольника не меньше AB, а ширина — не больше высоты CH треугольника, которая в свою очередь не меньше медианы $CM = \frac{1}{2}AB$.



Упражнение 8. а) Можно ли натуральные числа от 1 до 11 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была равна либо 2, либо 3.

б) То же, но числа надо выписать по кругу.

Подсчет узких мест (раскраска и принцип Дирихле)

Каждому пассажиру — по мягкому месту.
Фольклор железнодорожников

Сколько пассажиров может перевезти поезд — зависит от числа мест. А как быстро пассажиры смогут высадиться — зависит от числа дверей. Точно так же, и в задаче можно получить искомую оценку, выделив узкие места и подсчитав их количество.

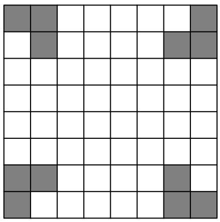
Пример 11. Дан правильный треугольник. Каким наименьшим числом меньших правильных треугольников его можно покрыть?

Анализ. Накрыв почти весь треугольник чуть меньшим, мы быстро обнаружим, что оставшуюся узенькую полоску или даже просто сторону исходного треугольника одним меньшим треугольником накрыть нельзя. Итак, стороны — узкое место, но для подсчета оно не годится: ведь можно накрывать стороны и по частям. Заметим, однако, что мы не можем накрыть оба конца стороны (то есть две вершины) одновременно. Вот оно — узкое место!

Решение. Каждый меньший треугольник может накрыть максимум одну из вершин исходного, поэтому понадобится не менее трех треугольников. Пример с накрытием тремя треугольниками легко строится.

В примере выше вершины уже сами по себе стояли особняком. Если таких явно выделенных объектов нет, бывает удобно самим выделить часть из группы однородных объектов, например, покрасить часть клеток доски.

Пример 12. Докажите, что 11 коней не могут побить все оставшиеся поля шахматной доски.



Решение. Закрасим на доске 12 полей (см. рисунок). Никакие два из этих полей не могут быть побиты одним конем. Значит, чтобы побить даже только раскрашенные поля, понадобится минимум 12 коней.

Комментарий к решению. Идея выделить 12 полей так, чтобы никакие два не бились одним конем — достаточно типовая. Заметив, что 12 кратно 4, естественно попытаться использовать симметрию доски. Тройки закрашенных полей естественно пытаться рассовывать по углам подальше друг от друга.

Информацию о числе (а еще лучше — о расположении) узких мест можно и нужно использовать и при построении примера. В частности, этот прием встречается в задачах типа «Оценка + пример».

Пример 13. Какое наименьшее число коней может побить все поля шахматной доски? (Считаем, что поле под собою конь тоже бьет.)

Указания. Попробуйте, воспользовавшись результатом и раскраской из предыдущего примера, построить требуемую расстановку из 12 коней. При этом надо обязательно побить все покрашенные поля, одновременно стараясь побить максимум из еще не побитых полей. Практично расставлять коней тройками и использовать симметрию: тогда достаточно убедиться, что побиты поля одного из угловых квадратов 4×4. Не стоит только пытаться побить весь угловой квадрат стоящими в нем конями, можно и нужно принять «помощь извне».

Число выделенных мест может использоваться не только для оценки сверху или снизу. Бывает полезно рассмотреть его с другой точки зрения. Например, проверить на делимость.

Пример 14. Можно ли в клетчатой таблице 13×13 отметить некоторые клетки так, чтобы любая клетка (как отмеченная, так и не отмеченная) граничила по стороне ровно с одной из отмеченных клеток?

Анализ и набросок двух решений. Будем считать, что отмеченная клетка — это фишка, которая бьет соседние по стороне клетки. Наша задача — побить все клетки ровно по разу. Раскрасим таблицу в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. Заметим, что фишка с черного поля бьет белые клетки, и наоборот. Поэтому задача побить все клетки по разу распадается на две независимые: побить все белые и побить все черные.

Попробуем сначала побить все черные. Начнем с угла (узкое место!). Угловая клетка бьется с точностью до симметрии однозначно. Далее у нас всегда находится непобитая черная клетка, которую можно побить всего одним способом (иначе какая-то клетка будет побита дважды).

Расстановка фишек продвигается однозначно, пока мы не зайдем в тупик, пытаясь побить третий угол.

В принципе, это уже можно оформлять как решение, хотя безукоризненно изложить весь перебор непросто. Нельзя ли упростить? Можно, если выделить не все черные клетки, а множество поменьше. Какое? А то, на котором возникает противоречие. Где лежат углы? На диагонали... Присмотримся: клетки диагонали всегда бьются *парами*. А так как всего на диагонали 13 клеток — нечетное число, то все клетки диагонали ровно по разу побить нельзя! Значит, нельзя ровно по разу побить и всю доску.

Задача 9. На какое наибольшее число натуральных слагаемых можно разложить число 99 так, чтобы все слагаемые были больше 1 и попарно взаимно просты?

Задача 10. Можно ли разрезать квадрат на 1000-угольник и 199 пятиугольников?

Задача 11. Можно ли расставить натуральные числа в клетках таблицы 4×4 так, чтобы в каждой паре соседних клеток (имеющих хотя бы одну общую вершину) одно из чисел делилось на другое, а в каждой паре несоседних клеток такого не было?

Посоветуйся с соседями (частный случай и аналогия)

Если нельзя, но очень хочется — то можно!
Фольклор

Узкое место можно обнаружить, решив более легкую похожую задачу. Чаще всего подойдет либо частный случай нашей задачи, либо эта же задача, но со слегка измененными цифрами. Важно заметить, что узкое место может остаться тем же самым даже когда ответ меняется на противоположный!

Пример 15. 20 детей разбили на пары мальчик-девочка так, что в каждой паре мальчик оказался выше девочки. После этого их разбили на пары мальчик-девочка по-другому. Может ли теперь оказаться, что в 9 парах из 10 девочка выше мальчика?

Анализ и решение. Поставим вопрос иначе: а может ли во всех новых парах девочка оказаться выше мальчика? Ясно, что нет — самый высокий мальчик (обозначим его $М_1$) просто выше всех, потому что он не ниже обоих участников любой старой пары. Хорошо, а второй по высоте мальчик $М_2$? Он выше всех девочек, кроме, быть может $Д_1$, которая в старой паре была с $М_1$. Чтоб построить нужный пример, придется в новой паре поставить $М_2$ с $Д_1$. Точно также третьего по высоте мальчика $М_3$ придется поставить с девочкой $Д_2$ (раньше она была в паре с $М_2$). Дальше ясно: возьмем $М_1 > Д_1 > М_2 > Д_2 > \ldots > М_{10} > Д_{10}$, в старых парах М и Д с одинаковым номером, в новых $Д_1 > М_2$, $Д_2 > М_3$, …, $Д_9 > М_{10}$, и только $Д_{10} < М_1$.

Конечно же, чаще узкое место более простого варианта задачи служит лишь подспорьем для поиска узких мест сложного варианта.

Пример 16. В строке записано 13 чисел. Известно, что сумма любых трех подряд положительна. Может ли сумма всех быть отрицательна?

Анализ и решение. Про 13 сразу неясно, а вот для 12 чисел можно было бы разбить на четыре тройки, поэтому сумма точно была бы положительной. Увы, 13 на 3 не делится, а дает в остатке 1. Это, однако, позволяет выявить узкое место: если пример все-таки есть, а сумма первых 12 положительна, то 13-е число должно быть отрицательным. Отрезая «тройки» справа, видим, что и 1-е число отрицательно. Если же резать на тройки, оставляя дырку в середине, то видим, что отрицательными должны быть также 4-е, 7-е и 10-е числа. Пора попробовать строить пример. Расчеты проще, если разных чисел меньше. Пусть на вышеуказанных номерах все числа равны $-x$, а на остальных $+y$ ($x > 0$, $y > 0$). Тогда сумма любых трех подряд $2y - x$, а сумма всех $8y - 5x$. Из неравенств $2y - x > 0$ и $8y - 5x < 0$ следует что $1{,}6y < x < 2y$. Взяв $x = 9$, $y = 5$, получим искомый пример.

Упражнение 12. По кругу записано 100 чисел. Известно, что сумма любых трех подряд положительна. Может ли сумма всех быть отрицательна?

Задача 13. Какое наименьшее число слонов может побить все поля шахматной доски? (Считаем, что поле под собою слон тоже бьет).

Задача 14. Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник а) на равнобедренные треугольники с углом 75° при основании?

б) на подобные равнобедренные непрямоугольные треугольники?

Несвобода в целом (инвариант)

Путешествуя по Советскому Союзу, иностранец упал в строительную яму.

Ругается: «У нас, мол, опасные места принято красными флажками огораживать».

Рабочий: «А ты что, пересекая границу, красных флагов не видел, что ли?»

Анекдот

Несвобода конструкции может быть в некотором свойстве целого, которого нет у частей. При попытке построения примера это обнаруживается в том, что «не сходится» только в самый последний момент. Типичные примеры такой несвободы дает *инвариант*, то есть что-то (число, свойство) конструкции, полученной разрешенными действиями. Типичные инварианты: четность, делимость на какое-то число, остаток по какому-то модулю, произведение или сумма всех чисел или остатков, периметр, площадь и т.п. Если разрешенные действия всегда дают одно значение инварианта, то конструкцию с другим значением получить невозможно. Например, нельзя доехать на поезде от Москвы до Нью-Йорка, поскольку поезд всегда остается на нашем континенте.

Пример 17. Можно ли в прямоугольную таблицу поставить числа так, чтобы в каждом столбце сумма была положительна, а в каждой строке — отрицательна?

Анализ и решение. Где могут столкнуться между собой указанные свойства? Ясно, что на сумме всех чисел таблицы. Именно эта сумма является узким местом: в первом случае она складывается из сумм столбцов, и потому положительна; во втором — из сумм строк, значит отрицательна. Противоречие.

Конечно, не все инварианты столь прозрачны, как в предыдущей задаче. Даже зная, где искать, порой приходится потрудиться. В геометрических задачах часто инвариантом служит рациональность или иррациональность длин и площадей. Но следующая задача все равно заслуженно считается трудной.

Пример 18. Найдется ли равносторонний треугольник с вершинами в узлах целочисленной решетки?

Анализ и решение. Изучим сперва произвольный треугольник с вершинами в узлах сетки. Длины его сторон по теореме Пифагора имеют вид $\sqrt{m^2+n^2}$, где m, n — целые числа. Такой корень может быть как рациональным, так и иррациональным числом. Площадь, однако — число рациональное, поскольку ее можно получить, отнимая от площади прямоугольника со сторонами по сетке площади прямоугольных треугольников со сторонами по сетке. (Более того, из этого следует, что площадь треугольника будет целым или полуцелым числом). Это, безусловно, узкое место таких треугольников. А что же с правильным треугольником? Согласно предыдущему, длина его стороны $a = \sqrt{k}$, где k — натуральное. Но тогда площадь $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{k\sqrt{3}}{4}$ — число безусловно иррациональное. Противоречие. Значит, такого равностороннего треугольника нет.

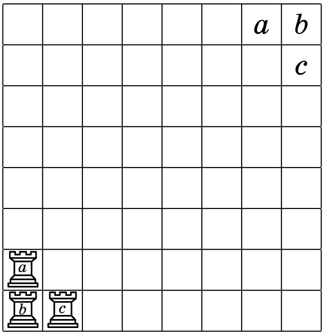
До сих пор мы использовали инвариант для доказательства невозможности. Но, как и другие узкие места, он вполне может оказаться полезен и при поиске оптимальной конструкции.

Пример 19. В банке 500 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 300 долларов или положить в него 198 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет.

Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?

Анализ и решение. Поэкспериментируем: если на счету денег достаточно, будем снимать разрешенные 300, если нет — то класть 198 обратно (это возможно, так как если на счету меньше 300, то на руках больше 200). Последим за суммами на руках: 300, 102, 402, 204, 6, 306, 108, 408, 210, 12, ... Заметим, что все эти числа делятся на 6. Причина, впрочем, понятна: и 300, и 198 делятся на 6, значит, каждый взнос или снятие денег это свойство сохраняет. Это и есть узкое место, из-за которого мы все деньги снять не можем, ведь 500 на 6 не делится. Ближайшее к 500 кратное 6 число — это 498. Но можем ли мы снять столько? Самое простое — продолжить вышеуказанный «жадный» алгоритм: «дают — бери, а нет — клади». Он приведет нас к успеху, хотя и придется сделать довольно много шагов. Более остроумно попытаться применить серию шагов «увеличь на 6», с помощью которой мы из 402 сделали 408: дважды кладем, снимаем, кладем, снимаем. Если на руках было a долларов, то станет последовательно $a-198$, $a-396$, $a-96$, $a-294$, $a+6$. Такая цепочка возможна, когда $a-396 \geqslant 0$ и $a+6 \leqslant 500$, то есть при $396 \leqslant a \leqslant 494$. Шагая так по 6, мы и доведем сумму на руках с 408 до 498.

Задача 15. На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу на одну монету больше. Какую наименьшую сумму могла стоить покупка?



Задача 16. В левом нижнем углу шахматной доски стоят три помеченные буквами ладьи (см. рис.). Разрешается делать ходы по обычным правилам, однако после любого хода каждая ладья должна быть под защитой какой-нибудь другой ладьи. Можно ли за несколько ходов переставить эти ладьи в правый верхний угол так, чтобы каждая попала на поле со своей буквой?

Задача 17. Можно ли разрезать квадрат на равные прямоугольные треугольники с углом 30°?

Самая первая неудача (минимальный контрпример и метод спуска)

Если уж падать с высокой лестницы — то лучше со ступеньки пониже.

Народная мудрость

Лестница надежна, если надежны все ее ступеньки. Но это надо проверять. Узким местом часто оказывается самая низкая из ненадежных ступенек. Дополнительное свойство «самая низкая» создает то ограничение свободы, которое облегчает поиск (если есть) или проверку отсутствия (если нет) такой ступеньки. В самом деле, если нет самой низкой ненадежной ступеньки, то ненадежных ступенек нет вообще (это когда лестница не уходит бесконечно вниз, то есть *бесконечный спуск* невозможен). То же самое на математическом языке можно сказать и по-другому: либо есть *минимальный контрпример*, либо контрпримера нет вообще.

Пример 20. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды одну карту рубашкой вниз или пачку из нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает эту карту или всю вынутую пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды. Докажите, что независимо от того, как Петя выбирает пачки, в конце концов все карты лягут рубашкой вверх.

Анализ и решение. Заметим, что Петя не может ничего сделать только когда все карты лежат рубашкой вверх. Допустим, нам удалось построить минимальный по числу карт контрпример П (то есть колоду, сложенную так, что Петя может вертеть ее бесконечно долго). В каком случае из него можно сделать контрпример с меньшим числом карт? Ага, это можно, если верхняя карта лежит рубашкой вверх. Тогда она никогда не будет перевернута, значит, колода без нее служит меньшим контрпримером. Хорошо, а если верхняя карта лежала рубашкой вниз? Тогда Петя рано или поздно ее перевернет (или не перевернет никогда, но тогда, как и прежде, уже колода без нее — контрпример). Заметим, однако, что после переворота пачки с верхней картой наверху окажется карта рубашкой вверх. Вся колода по-прежнему остается контрпримером, значит, и колода без верхней карты — контрпример. Так уменьшая, спустимся до колоды из одной карты, которая контрпримером точно не будет. Значит, контрпримера нет вообще, то есть из любого положения Петя за конечное число шагов переложит все карты рубашкой вверх.

Обратите внимание, что в предыдущем решении мы шли при проверке не снизу вверх, а *сверху вниз,* то есть строили более простой пример из сложного. Идея понятна: упрощать легче, чем усложнять. Этот метод еще называют *методом спуска* или *методом бесконечного спуска* (когда процесс не заканчивается). Доказательство, правда, получается непрямым: мы доказываем не наличие счастья, а отсутствие несчастья (не все математики согласны, что это одно и то же!). На деле, в большинстве случаев из доказательства методом спуска вполне возможно построить конструктивный алгоритм (построения счастья).

Пример 21. В прямоугольнике $3 \times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишки трех цветов по n штук каждого цвета.

а) Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.

б) Докажите, что можно обойтись менее чем $2n$ перестановками.

Анализ и решение. а) Допустим, нам удалось построить минимальный по числу столбцов контрпример. В нем нет столбца с фишками трех цветов, иначе, вычеркнув этот столбец, мы получили бы меньший контрпример. Пусть найдется столбец с фишками двух цветов, скажем, две белых и одна синяя, а красных нет. Отметим строки, где лежат эти две белые фишки. Если в этих строках есть красная фишка, поменяем ее местами с белой. Контрпримером останется контрпримером, минимальность сохранится, но появится столбец с фишками трех цветов, что невозможно. А если красной фишки там нет? Как нет, обязана быть: в оставшейся строке есть только $n-1$ позиция для красных фишек, а их всего n. Наконец, если все столбцы одного цвета, то в любой такой столбец можно перестановкой в строке впихнуть фишку другого цвета. Итак, мы доказали что никакой контрпример не будет минимальным, значит контрпримеров нет вообще, и пункт а) доказан.

Решение. б) Будем исправлять столбцы слева по порядку, переставляя в них фишки из столбцов справа от них. Если в первом столбце все фишки одного цвета, переместим туда фишку другого цвета. Если там фишки двух цветов, то согласно вышесказанному одну из двух совпадающих по цвету фишек можно заменить на фишку третьего цвета. Так мы сделаем первый столбец трехцветным максимум за две перестановки. Теперь, не трогая его (мысленно вычеркнув), точно также максимум за две перестановки сделаем трехцветным второй столбец, и т. д. На приведение в порядок $n-1$ столбца нам понадобится не более $2(n-1)$ перестановок. А поскольку фишек всех цветов поровну, последний столбец окажется трехцветным автоматически.

Параметр, по которому оценивается минимальность контрпримера, далеко не всегда столь очевиден. Кроме того, таких параметров может быть несколько. Спустившись вниз по одному параметру и зафиксировав его, бывает нужно заняться уменьшением другого.

Пример 22. На доске написано натуральное число $n > 1$. Разрешается выбрать любой простой делитель p числа n, и заменить n на число $\frac{n}{p} \cdot (p-1)^p$. Докажите, что в результате таких замен на доске рано или поздно появится число 1.

Анализ и решение. Заметим, что в разложении числа n на простые множители присутствует сомножитель p, и что в результате замены уменьшается показатель степени у p. При этом увеличиться показатель может только у простых сомножителей, меньших p, а именно у тех, которые делят $p-1$. Обозначим через $P(n)$ наибольший простой делитель n. Пусть мы произвели замену n на m. Заметим, что если мы для замены выбрали $p < P(n)$, то $P(m) = P(n)$, а если $p = P(n)$, то либо p исчезнет из разложения, либо степень его уменьшится, и это — необратимо. Поэтому будем искать контрпример с наименьшим значением $P(n)$, а среди таких — с наименьшей степенью этого делителя.

Допустим, такой контрпример нашелся, то есть нашлась бесконечная последовательность с первым членом n, где любой другой член получается из предыдущего указанной заменой. Если для какой-то из замен выбрано $p = P(n)$, то начиная с этого места хвост последовательности будет «меньшим» (в указанном выше смысле) контрпримером. Если же замен с $p = P(n)$ нет, то всю последовательность можно почленно поделить на p — и опять получится «меньший» контрпример. Противоречие.

Задача 18. В последовательности чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, $\ldots$ каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Докажите, что любые два соседних чисел Фибоначчи взаимно просты.

Задача 19. Шайка разбойников отобрала у купца мешок монет. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету ни отложить, оставшуюся сумму можно разделить между разбойниками поровну. Докажите, что число монет без одной кратно числу разбойников.

Задача 20. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, каждый не на своем месте. Билетер может попросить поменяться местами любых двух соседей, и так много раз. Однако любой зритель, попав на свое место, затем пересаживаться отказывается. Докажите, что билетер всегда может рассадить всех по своим местам.

Эпилог

Конечно, перечисленные подходы далеко не исчерпывают способы поиска узких мест. К тому же автор намеренно ограничил материал кругом наиболее ему знакомых комбинаторно-конструктивных задач, вполне сознавая, что область применения принципа узких мест гораздо шире. Свои способы поиска узких мест наверняка есть и при решении задач по алгебре, геометрии, теории чисел. Но об этом как раз стоило бы написать именно специалистам в этих областях. Автор надеется, что соединение специальных приемов с поиском узких мест позволит этим приемам стать более общими, а принципу узких мест — менее размытым. Ну, а приведенные аналогии с житейскими ситуациями намекают на применимость принципа узких мест и за границами математики и даже науки — нестандартные задачи всюду встречаются...

Ответы и указания

Упражнение 1. Можно.

Указание. Подберите числа вне зазора так, чтоб их среднее попало в зазор.

Задача 2. Нет.

Указание. Узкое место: размер части ограничен размерами квадрата, а его размеры — площадью треугольника.

Задача 3. *Указание.* Разбейте доску на клетки 2×2 и раскрасьте их в шахматном порядке. Разбейте черные клетки на вертикальные пары, а белые — на горизонтальные. Покажите, что в любую пятерку клеток одна пара входит целиком.

Задача 4. Нет.

Указание. Один берег — вороные и гнедые, другой — соловые и каурые.

Задача 5. Найдутся.

Указание. Один берег — те наборы из 1000 чисел, где больше 5 простых, другой — наборы, где меньше 5 простых. Покажите, что оба берега непусты.

Задача 6. *Указание.* Разбейте окружность на дуги пропорциональные весам кусков. Тогда каждому диаметру соответствует пара разрезов с разбиением кусков на кучки разного веса. Покажите, что при повороте диаметра стоимости кучек меняются непрерывно.

Упражнение 8. 1, 3, 6, 9, 11, 8, 10, 7, 5, 2, 4.

Задача 9. На 8 слагаемых.

Указание. Каждое слагаемое не меньше своего простого делителя, а сумма девяти первых простых чисел больше 99.

Задача 10. Нет.

Указание. Выделенное множество — вершины 1000-угольника.

Задача 11. Нет.

Указание. Выделенное множество — замкнутый маршрут короля из 7 клеток, где нет ходов между несоседними полями.

Упражнение 12. Нет.

Указание. Покажите, что в контрпримере каждое из чисел должно быть отрицательным.

Задача 13. 8 слонов.

Указание. Решите сперва для ладей на доске 4×4 и примените результат к слонам на полях каждого из цветов.

Задача 14. а) Нет.

Указание. Сгруппируйте углы по общим вершинам и оцените в каждой вершине долю углов в 75°.

б) Да.

Указание. Рассмотрите такие углы при основании треугольника, из которых складывается прямой. Пример строится для наибольшего из подходящих углов.

Задача 15. 6 фертингов (например, $50+1-15-15-15$).

Указание. Стоимость покупки должна давать остаток 6 при делении на 7.

Задача 16. Нет.

Указание. При обходе треугольника ладей по часовой стрелке всегда будет круговой порядок a, b, c.

Задача 17. Нет.

Указание. Считая, что стороны треугольника $1, 2, \sqrt{3}$, рассмотрите, какие значения может принимать длина стороны квадрата и его площадь.

Задача 18. *Указание.* Общий делитель b и $a + b$ будет также и общим делителем a и b.

Задача 19. *Указание.* Достоинства монет в грошах дают одинаковый остаток при делении на число разбойников, а в минимальном контрпримере достоинства взаимно просты.

Задача 20. *Указание.* Рассмотрите минимальный по числу зрителей контрпример, а среди таких — минимальный по удаленности от своего места зрителя с билетом на крайнее место.

Авторы задач

В основном автор старался использовать свои задачи (З) и примеры (П). Это П 1, З 3, П 5, П 7, З 6, П 10, З 9, З 10, З 11, З 14, З 15, З 16, З 17, П 20, П 22, З 19, З 20. Что касается остальных задач, то их авторов, к сожалению, удалось установить далеко не во всех случаях. Это, однако, не повод умолчать о тех, кто известен: Б. Бегун — П 2, Г. Гальперин — З 5, Р. Женодаров — П 3, С. Маркелов — З 2, Р. Садыков — З 4, С. Токарев — П 14, А. Толпыго — П 19. Спасибо им, а также и тем неизвестным автором, чьи задачи давно и заслуженно перешли в разряд фольклора!

Литература

[1] *С.А.Генкин, Д.В.Итенберг, Д.В.Фомин*. Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1994.

[2] *А.Я.Канель-Белов, А.К.Ковальджи*. Как решают нестандартные задачи. — М.: МЦНМО, 2006.

[3] *В.А.Уфнаровский*. Математический аквариум. — Ижевск: НИЦ «РХД», 2000.

[4] *Л.Курляндчик, Г.Розенблюм*. Метод бесконечного спуска // Математический кружок. (Приложение к журналу «Квант», 1999. № 3.)

[5] *А.Розенталь*. Правило крайнего // Математика 6–8. (Приложение к журналу «Квант», 1998. № 3.)